

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	12
Введение . . . . .	15
1. Предмет и происхождение математики (15). 2. Значение математики и математических знаний (16). 3. Абстрактность (18). 4. Характерные черты высшей математики (19). 5. Замечания о развитии математики (21). 6. Математика в Советском Союзе (22).	
Глава I. Величина и функция . . . . .	24
§ 1. Величина . . . . .	24
1. Понятие величины (24). 2. Размерность величины (24). 3. Постоянные и переменные величины (25). 4. Числовая ось. Логарифмическая линейка (26). 5. Характеристики переменных величин (28).	
§ 2. Приближенные значения величины . . . . .	30
6. Понятие приближенного значения (30). 7. Погрешности (30). 8. Запись приближенных чисел (31). 9. Сложение и вычитание приближенных чисел. (32). 10. Умножение и деление приближенных чисел. Общие замечания (34).	
§ 3. Функции и графики . . . . .	36
11. Функциональная зависимость (36). 12. Обозначения (37). 13. Способы задания функций (39). 14. Графики функций (41). 15. Область определения функции (42). 16. Характеристики поведения функции (44). 17. Алгебраическая классификация функций (47). 18. Элементарные функции (48). 19. Преобразования графиков (49). 20. Неявные функции (51). 21. Обратные функции (52).	
§ 4. Обзор простейших функций . . . . .	54
22. Линейная функция (54). 23. Квадратичная функция (56). 24. Степенная функция (57). 25. Дробно-линейная функция (59). 26. Логарифмическая функция (60). 27. Показательная функция (62). 28. Гиперболические функции (62). 29. Тригонометрические функции (64). 30. Подбор эмпирической формулы (67).	
Глава II. Аналитическая геометрия на плоскости . . . . .	69
§ 1. Координаты на плоскости . . . . .	69
1. Декартовы координаты (69). 2. Простые задачи на декартовы координаты (70). 3. Полярные координаты (71).	

§ 2. Линии на плоскости . . . . .	72
4. Уравнение линии в декартовых координатах (72).	
5. Уравнение линии в полярных координатах (74).	
6. Параметрическое задание линий и функций (76).	
7. Алгебраические линии (78).	
8. Особые случаи (80).	
§ 3. Алгебраические линии первых двух порядков . . . . .	81
9. Линии первого порядка (81).	
10. Эллипс (83).	
11. Гипербола (86).	
12. Родство эллипса, гиперболы и параболы (88).	
13. Общее уравнение линии второго порядка (90).	
<b>Глава III. Предел. Непрерывность . . . . .</b>	<b>93</b>
§ 1. Бесконечно малые и бесконечно большие величины . . . . .	93
1. Бесконечно малые величины (93).	
2. Свойства бесконечно малых (95).	
3. Бесконечно большие величины (96).	
§ 2. Пределы . . . . .	97
4. Определение (97).	
5. Свойства пределов (99).	
6. Сумма числового ряда (101).	
§ 3. Сравнение бесконечно малых . . . . .	104
7. Сравнение бесконечно малых (104).	
8. Свойства эквивалентных бесконечно малых (105).	
9. Важные примеры (105).	
10. Порядок малости (107).	
11. Сравнение бесконечно больших (107).	
§ 4. Непрерывные и разрывные функции . . . . .	108
12. Развернутое определение непрерывной функции (108).	
13. Точки разрыва (108).	
14. Свойства непрерывных функций (110).	
15. Некоторые приложения (113).	
<b>Глава IV. Производные, дифференциалы, исследование изменения функции . . . . .</b>	<b>115</b>
§ 1. Производная . . . . .	115
1. Примеры, приводящие к понятию производной (115).	
2. Определение производной (116).	
3. Геометрический смысл производной (117).	
4. Основные свойства производной (119).	
5. Производные основных элементарных функций (122).	
6. Касательная в полярных координатах (125).	
§ 2. Дифференциал . . . . .	127
7. Физические примеры (127).	
8. Определение дифференциала и связь его с приращением (128).	
9. Свойства дифференциала (130).	
10. Применение дифференциала в приближенных вычислениях (131).	
§ 3. Производные и дифференциалы высших порядков . . . . .	133
11. Производные высших порядков (133).	
12. Дифференциалы высших порядков (134).	
§ 4. Правило Лопиталю . . . . .	135
13. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (135).	
14. Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ (137).	

§ 5. Формула и ряд Тейлора . . . . .	138
15. Формула Тейлора (138). 16. Ряд Тейлора (140).	
§ 6. Интервалы монотонности и экстремум . . . . .	142
17. Знак производной (142). 18. Точки экстремума (143).	
19. Наибольшее и наименьшее значения функции (144).	
§ 7. Построение графиков . . . . .	148
20. Участки выпуклости графика и точки перегиба (148).	
21. Асимптоты графика (148). 22. Общая схема исследования функции и построения ее графика (149).	
<b>Глава V. Приближенное решение конечных уравнений. Интерполяция</b> . . . . .	152
§ 1. Приближенное решение конечных уравнений . . . . .	152
1. Введение (152). 2. Методы проб, хорд и касательных (154). 3. Метод итераций (156). 4. Формула конечных приращений (158). 5. Метод малого параметра (160).	
§ 2. Интерполяция . . . . .	162
6. Интерполяционная формула Лагранжа (162). 7. Конечные разности и их связь с производными (163). 8. Интерполяционные формулы Ньютона (166). 9. Численное дифференцирование (168).	
<b>Глава VI. Определители и системы линейных алгебраических уравнений</b> . . . . .	170
§ 1. Определители . . . . .	170
1. Определение (170). 2. Свойства (171). 3. Разложение определителя по элементам ряда (173).	
§ 2. Система линейных алгебраических уравнений . . . . .	175
4. Формулы для решения (175). 5. Численное решение (177). 6. Случай $D=0$ (178).	
<b>Глава VII. Векторы</b> . . . . .	181
§ 1. Линейные действия над векторами . . . . .	181
1. Скалярные и векторные величины (181). 2. Сложение векторов (182). 3. Нуль-вектор и вычитание векторов (183). 4. Умножение вектора на скаляр (184). 5. Линейная комбинация векторов (185).	
§ 2. Скалярное произведение векторов . . . . .	187
6. Проекция вектора на ось (187). 7. Скалярное произведение (188). 8. Свойства скалярного произведения (189).	
§ 3. Декартовы координаты в пространстве . . . . .	189
9. Декартовы координаты в пространстве (189). 10. Простые задачи на декартовы координаты (190).	
§ 4. Векторное произведение векторов . . . . .	193
11. Ориентация поверхности и вектор площадки (193). 12. Векторное произведение (194). 13. Свойства векторного произведения (196). 14. Истинные векторы и псевдовекторы (199).	

§ 5. Произведения трех векторов . . . . .	199
15. Векторно-скалярное произведение (199). 16. Векторно-векторное произведение (200).	
§ 6. Линейные пространства . . . . .	201
17. Понятие линейного пространства (201). 18. Примеры (203). 19. Размерность линейного пространства (204). 20. Понятие евклидова пространства (207). 21. Ортогональность (208).	
§ 7. Векторные функции скалярного аргумента и кривизна . .	210
22. Переменные векторные величины (210). 23. Векторная функция скалярного аргумента (210). 24. Понятия, связанные со второй производной (213). 25. Соприкасающаяся окружность (214). 26. Эволюта и эвольвента (216).	
<b>Глава VIII. Комплексные числа и функции . . . . .</b>	<b>219</b>
§ 1. Комплексные числа . . . . .	219
1. Комплексная плоскость (219). 2. Алгебраические действия над комплексными числами (220). 3. Сопряженные комплексные числа (222). 4. Формула Эйлера (224). 5. Логарифмы комплексных чисел (226).	
§ 2. Комплексные функции от вещественного аргумента . . . .	226
6. Определение и свойства (226). 7. Применение к описанию колебаний (228).	
§ 3. Понятие о функциях комплексного переменного . . . . .	229
8. Разложение многочлена на множители (229). 9. Численное решение алгебраических уравнений (231). 10. Разложение дробно-рациональной функции на простейшие рациональные дроби (234). 11. Общие замечания о функциях комплексного переменного (237).	
<b>Глава IX. Функции нескольких переменных . . . . .</b>	<b>239</b>
§ 1. Функции двух переменных . . . . .	239
1. Способы задания (239). 2. Область определения (242). 3. Линейная функция (242). 4. Непрерывность и разрывы (243). 5. Неявные функции (245).	
§ 2. Функции любого числа переменных . . . . .	246
6. Способы задания (246). 7. Функции трех переменных (246). 8. Общий случай (247). 9. Поле (247).	
§ 3. Частные производные и дифференциалы первого порядка . .	248
10. Основные определения (248). 11. Полный дифференциал (249). 12. Производная сложной функции (251). 13. Производные неявных функций (253).	
§ 4. Частные производные и дифференциалы высших порядков	255
14. Определения (255). 15. Равенство смешанных производных (256). 16. Полный дифференциал высшего порядка (257).	

Глава X. Аналитическая геометрия в пространстве . . . . .	258
§ 1. Координаты в пространстве . . . . .	258
1. Различные виды координат в пространстве (258). 2. Число степеней свободы (259).	
§ 2. Поверхности и линии в пространстве . . . . .	262
3. Поверхности в пространстве (262). 4. Цилиндры, конусы, поверхности вращения (262). 5. Линия в пространстве (264). 6. Параметрическое задание поверхностей в пространстве и функций (265).	
§ 3. Алгебраические поверхности первых двух порядков . . . . .	266
7. Поверхности первого порядка (266). 8. Эллипсоид (269). 9. Гиперболоиды (270). 10. Параболоиды (272). 11. Обзор поверхностей второго порядка (273).	
Глава XI. Матрицы и их применение . . . . .	274
§ 1. Матрицы . . . . .	274
1. Определения (274). 2. Действия над матрицами (276). 3. Обратная матрица (277). 4. Собственные векторы и собственные значения матрицы (279). 5. Ранг матрицы (280).	
§ 2. Линейные отображения . . . . .	282
6. Линейное отображение и его матрица (282). 7. Преобразование матрицы отображения при замене базиса (288). 8. Матрица отображения в базисе из собственных векторов (290). 9. Замена декартова базиса (291). 10. Симметрические матрицы (293).	
§ 3. Квадратичные формы . . . . .	294
11. Квадратичные формы (294). 12. Упрощение уравнений линий и поверхностей второго порядка (296).	
§ 4. Нелинейные отображения . . . . .	297
13. Общие понятия (297). 14. Нелинейное отображение в малом (298). 15. Функциональная зависимость функций (300).	
Глава XII. Применение частных производных . . . . .	302
§ 1. Скалярное поле . . . . .	302
1. Производная по направлению и градиент (302). 2. Поверхности уровня (304). 3. Неявные функции двух переменных (306). 4. Плоские поля (307). 5. Огибающая однопараметрического семейства линий (307).	
§ 2. Экстремум функции нескольких переменных . . . . .	309
6. Формула Тейлора для функции нескольких переменных (309). 7. Экстремум (310). 8. Метод наименьших квадратов (313). 9. Кривизна поверхностей (315). 10. Условный экстремум (317). 11. Экстремум с ограничениями (319). 12. Численное решение систем уравнений (321).	

Глава XIII. Неопределенный интеграл . . . . .	323
§ 1. Элементарные методы интегрирования . . . . .	323
1. Основные определения (323). 2. Простейшие интегралы (324). 3. Простейшие свойства неопределенного интеграла (327). 4. Интегрирование по частям (329). 5. Замена переменной (330).	
§ 2. Систематическое интегрирование . . . . .	333
6. Интегрирование рациональных функций (333). 7. Линейные и дробно-линейные иррациональности (335). 8. Квадратичные иррациональности (336). 9. Дифференциальный бином (339). 10. Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических функций (339). 11. Общие замечания (341).	
Глава XIV. Определенный интеграл . . . . .	344
§ 1. Определение и основные свойства . . . . .	344
1. Примеры, приводящие к понятию определенного интеграла (344). 2. Основное определение (346). 3. Связь определенного интеграла с неопределенным (349). 4. Основные свойства определенного интеграла (352). 5. Интегрирование неравенств (356).	
§ 2. Применение определенного интеграла . . . . .	359
6. Две схемы применения (359). 7. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными (361). 8. Вычисление площадей плоских фигур (362). 9. Длина дуги (365). 10. Объем тела (366). 11. Площадь поверхности вращения (367).	
§ 3. Численное интегрирование . . . . .	369
12. Общие замечания (369). 13. Формулы численного интегрирования (371).	
§ 4. Несобственные интегралы . . . . .	374
14. Интеграл с бесконечным пределом интегрирования (374). 15. Основные свойства интегралов с бесконечным пределом интегрирования (376). 16. Несобственные интегралы иных видов (382). 17. Гамма-функция (385). 18. Бета-функция (387). 19. Главное значение расходящегося интеграла (388).	
§ 5. Интегралы, зависящие от параметра . . . . .	390
20. Собственные интегралы (390). 21. Несобственные интегралы (391).	
§ 6. Криволинейные интегралы . . . . .	393
22. Интеграл по длине дуги (393). 23. Интеграл по координате (395). 24. Условия независимости криволинейного интеграла по координатам от контура интегрирования (398).	
§ 7. Понятие об обобщенных функциях . . . . .	401
25. Дельта-функция (401). 26. Приложение к построению функции влияния (403). 27. Другие обобщенные функции (406).	



Глава XV. Дифференциальные уравнения . . . . .	408
§ 1. Общие понятия . . . . .	408
1. Примеры (408). 2. Основные определения (409).	
§ 2. Уравнения первого порядка . . . . .	411
3. Геометрический смысл (411). 4. Интегрируемые типы уравнений (413). 5. Уравнение для экспоненты (416). 6. Интегрирование полного дифференциала (418). 7. Особые точки и особые решения (420). 8. Уравнения, не разрешенные относительно производной (423). 9. Метод предварительного дифференцирования (423).	
§ 3. Уравнения высших порядков и системы уравнений . . . . .	425
10. Уравнения высших порядков (425). 11. Связь уравнений высшего порядка с системами уравнений первого порядка (427). 12. Геометрический смысл системы уравнений первого порядка (428). 13. Первые интегралы (430).	
§ 4. Линейные уравнения общего вида . . . . .	432
14. Линейные однородные уравнения (432). 15. Неоднородные уравнения (434). 16. Краевые задачи (438).	
§ 5. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	441
17. Однородные уравнения (442). 18. Неоднородные уравнения с правыми частями специального вида (445). 19. Уравнение Эйлера (449). 20. Операторы и операторное решение уравнений (449).	
§ 6. Системы линейных уравнений . . . . .	452
21. Системы линейных уравнений (452). 22. Приложение к выяснению устойчивости по Ляпунову состояния равновесия (456).	
§ 7. Приближенное и численное решение уравнений . . . . .	458
23. Метод итераций (459). 24. Применение ряда Тейлора (460). 25. Применение степенных рядов с неопределенными коэффициентами (461). 26. Функции Бесселя (462). 27. Метод малого параметра (464). 28. Общие замечания о зависимости решения от параметра (466). 29. Методы улучшения невязки (468). 30. Метод упрощения (469). 31. Метод Эйлера (470). 32. Метод Рунге — Кутта (472). 33. Метод Адамса (473). 34. Метод Милна (474).	
Глава XVI. Кратные интегралы . . . . .	476
§ 1. Определение и основные свойства кратных интегралов . . . . .	476
1. Примеры, приводящие к понятию кратного интеграла (476). 2. Определение кратных интегралов (477). 3. Основные свойства интегралов (478). 4. Основные методы применения кратных интегралов (480). 5. Геометрический смысл интеграла, взятого по плоской фигуре (481).	
§ 2. Два типа физических величин . . . . .	482
6. Основной пример. Масса и плотность (482). 7. Величины, распределенные по пространству (483).	

§ 3. Вычисление кратных интегралов в декартовых координатах . . . . .	485
8. Интеграл по прямоугольнику (485). 9. Интеграл по произвольной плоской фигуре (487). 10. Интеграл по произвольной поверхности (489). 11. Интеграл по объему (491).	
§ 4. Замена переменных в кратных интегралах . . . . .	492
12. Переход к полярным координатам на плоскости (492). 13. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в пространстве (493). 14. Общие криволинейные координаты на плоскости (494). 15. Общие криволинейные координаты в пространстве (496). 16. Координаты на поверхности (497).	
§ 5. Варианты кратных интегралов . . . . .	499
17. Несобственные интегралы (499). 18. Интегралы, зависящие от параметра (501). 19. Интеграл по общей мере и обобщенные функции (502). 20. Многомерные интегралы (504).	
§ 6. Векторное поле . . . . .	506
21. Векторные линии (506). 22. Поток вектора через поверхность (507). 23. Дивергенция (508). 24. Выражение дивергенции в декартовых координатах (510). 25. Линейный интеграл и циркуляция (511). 26. Ротор (512). 27. Формулы Грина и Стокса (515). 28. Выражение векторных операций в криволинейной ортогональной системе координат (517). 29. Общая формула для преобразования интегралов (518).	
Глава XVII. Ряды . . . . .	520
§ 1. Числовые ряды . . . . .	520
1. Ряды с положительными членами (520). 2. Ряды с членами любого знака (524). 3. Действия с рядами (525). 4. Скорость сходимости ряда (527). 5. Ряды с комплексными, векторными и матричными членами (530). 6. Кратные ряды (531).	
§ 2. Общие функциональные ряды . . . . .	533
7. Уклонение функций (533). 8. Сходимость функционального ряда (534). 9. Свойства функциональных рядов (535).	
§ 3. Степенные ряды . . . . .	537
10. Интервал сходимости (537). 11. Свойства степенных рядов (538). 12. Конечные действия над степенными рядами (541). 13. Степенной ряд как ряд Тейлора (544). 14. Степенные ряды с комплексными членами (545). 15. Понятие о числах Бернулли (546). 16. Применение рядов к решению разностных уравнений (547). 17. Кратные степенные ряды (548). 18. Функции от матриц (549). 19. Асимптотические разложения (551).	
§ 4. Тригонометрические ряды . . . . .	553
20. Свойство ортогональности (553). 21. Ряды по ортогональным функциям (555). 22. Ряды Фурье (556). 23. Разложение периодической функции (560). 24. Пример. Функ-	



ции Бесселя как коэффициенты Фурье (562). 25. Характер сходимости ряда Фурье (563). 26. Комплексная форма ряда Фурье (566). 27. Равенство Парсевэля (567). 28. Пространство Гильберта (569). 29. Ортогональность с весом (570). 30. Кратные ряды Фурье (571). 31. Приложение к уравнению колебаний конечной струны (572).

- § 5. Преобразование Фурье . . . . . 574  
 32. Формулы преобразования Фурье (574). 33. Свойства преобразования Фурье (576). 34. Приложение к уравнению колебаний бесконечной струны (578).

## Глава XVIII. Элементы теории вероятностей . . . . . 579

- § 1. Случайные события и их вероятности . . . . . 579

1. Случайные события (579). 2. Вероятность (580). 3. Основные свойства вероятности (582). 4. Правило умножения вероятностей (584). 5. Формула полной вероятности (585). 6. Формула вероятностей гипотез (586). 7. Принцип игнорирования маловероятных событий (587).

- § 2. Случайные величины . . . . . 588

8. Определения (588). 9. Примеры дискретных случайных величин (589). 10. Примеры непрерывных случайных величин (591). 11. Системы случайных величин (592). 12. Функции от случайных аргументов (593).

- § 3. Числовые характеристики случайных величин . . . . . 594

13. Среднее значение (594). 14. Свойства среднего значения (595). 15. Дисперсия (597). 16. Корреляционная зависимость (598). 17. Характеристическая функция (599).

- § 4. Применения нормального закона . . . . . 601

18. Нормальный закон как предельный (601). 19. Доверительные оценки средних (603). 20. Обработка эмпирических данных (604).

## Глава XIX. О современной вычислительной технике . . . . . 607

- § 1. Два основных типа вычислительных машин . . . . . 607

1. Моделирующие вычислительные машины (608). 2. Цифровые вычислительные машины (611).

- § 2. Понятие о программировании . . . . . 613

3. Системы счисления (613). 4. Запись чисел в машине (615). 5. Команды (618). 6. Примеры программирования (619). 7. Краткие сведения о советских электронных универсальных цифровых машинах (626).

Рекомендуемая литература . . . . . 630

Предметный указатель . . . . . 632

Указатель обозначений . . . . . 640